Investigación Operativa

Programación no lineal

Índice

La programación no lineal. Introducción

Un modelo matemático o problema se dice que pertenece a la **programación no lineal** si la función objetivo y/o alguna de las restricciones del problema son una función no lineal de las variables de decisión (**modelo o problema no lineal**).

Problemas de estas características surgen de forma inevitable en las aplicaciones de ingeniería, tales como diseño y control óptimo, y en aplicaciones científicas. Además, muchos problemas que se formulan como lineales se convierten en no lineales cuando se tienen en cuenta economías de escala (por ejemplo, costes no proporcionales a la cantidad).

EL MODELO BÁSICO EN PNL:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ s.a: & x \in F \\ & x \in \mathbf{R}^n \end{array}$$

F definido a partir de un conjunto de restricciones.

ALGORITMOS DE SOLUCIÓN BÁSICOS:

1. Algoritmos que no utilizan derivadas

2. **Algoritmos que utilizan derivadas**

Conceptos básicos de programación no lineal

Cuando el problema está compuesto por **funciones diferenciables**, podemos aplicar algoritmos de solución basados en las derivadas de la/s función/es. Dos conceptos básicos asociados con las funciones diferenciables son el **gradiente** y el **hessiano** (para el cálculo de este último se necesita que la función sea dos veces diferenciable).

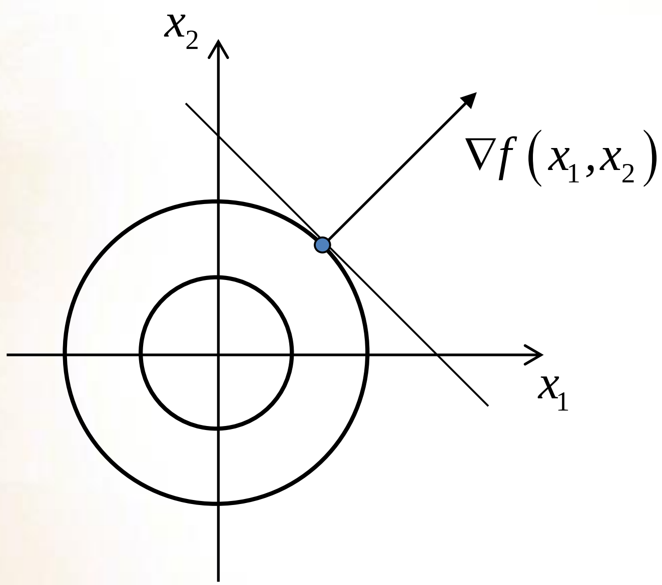
Dada una función f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, se define el **gradiente** de f, ∇f, como

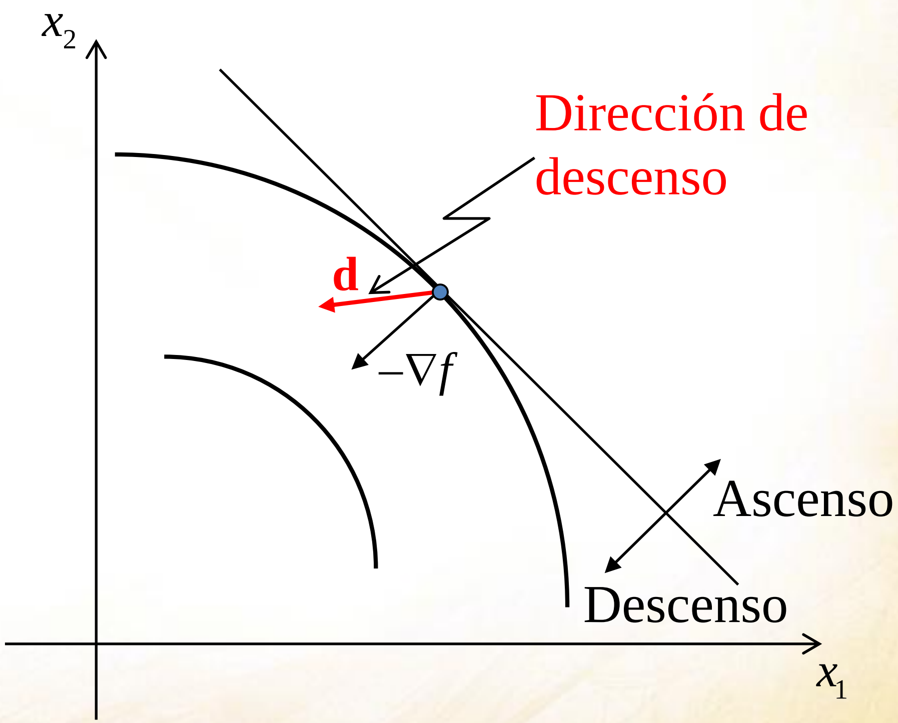
$$\boxed{\nabla f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left(\frac{\partial f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_n}\right)^T.}$$

Una **condición necesaria** para que un punto sea un máximo o mínimo (local) de una función es que su gradiente sea cero en dicho punto, es decir que sea un **punto estacionario**.

INTERPRETACIÓN:

El gradiente de una función escalar indica en cada punto la **dirección de máximo crecimiento** de la misma. Además, el gradiente de una función en un punto es el **vector normal al hiperplano tangente** de la función en dicho punto.





Conceptos básicos de programación no lineal

Dada una función f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, se define el **hessiano** de f, Hf, como

$$Hf\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

El hessiano de una función nos sirve para dar **condiciones suficientes** para que un punto estacionario $\overline{x}$ de la función sea un máximo o mínimo (relativo). En particular, cuando $Hf(\overline{x})$ es definida positiva, el punto estacionario $\overline{x}$ es un mínimo local de f(x).

Algoritmos de direcciones de descenso:

Paso 1 (iniciación): Se elige un punto inicial x^1 y se toma k =1.

Paso 2: Se obtiene una dirección de descenso $\mathbf{d}^k$ de f en el punto x^k.

Paso 3: Si $\mathbf{d}^k = 0$, entonces se para. x^k es la solución. En caso contrario se continúa.

Paso 4: Se busca una longitud de paso α^k.

Paso 5: Se toma $x^{k+1} = x^k + \alpha^k \mathbf{d}^k$.

Paso 6: Si se cumple determinado criterio de parada, entonces se para. En caso contrario se toma $k = k+1$ y se va a 2.

Las claves fundamentales de los métodos de direcciones de descenso son la selección de una dirección de descenso y el desplazamiento a lo largo de esa dirección. Al variar el modo de obtener la dirección de descenso se obtiene un método diferente. Los más usuales son:

1.- **Método de Newton**. Este algoritmo elige como dirección de búsqueda:

$$\mathbf{d} = -f'(x)/f''(x) \qquad \text{(una variable)}$$

$$\mathbf{d} = -Hf(x)^{-1}\nabla f(x) \quad \text{(varias variables).}$$

Es importante notar que la dirección **d** no se puede calcular si $Hf(x)$ es una matriz singular. Además, **d** no es necesariamente una dirección de descenso.

2.- **Método del gradiente (o de Cauchy)**. Este algoritmo elige como dirección de búsqueda: $\mathbf{d} = -\nabla f(x)$, que sí es de descenso.

ALGORITMO DE NEWTON PARA PROBLEMAS DE UNA SOLA VARIABLE:

Paso 0: Elegir $\varepsilon > 0$ para precisión mínima. Elegir x_1 como semilla de inicio.

Paso 1: Calcular $f'(x_1)$ y $f''(x_1)$. Si $|f'(x_1)| < \varepsilon$, entonces PARAR; x_1 es una solución para el problema. En otro caso, calcular $x_2 = x_1 - f'(x_1)/f''(x_1)$. IR al Paso 2.

Paso 2: Si $|x_2 - x_1| < \varepsilon$, entonces PARAR; x_2 es una solución para el problema. En otro caso, hacer $x_1 := x_2$ e IR al Paso 1.

CARACTERÍSTICAS:

1. Se utiliza para funciones dos veces derivables.
2. Se basa en la aproximación cuadrática de una función.
3. **Sirve para buscar puntos que anulan la derivada de la función**.
4. La segunda derivada debe ser no nula en cada punto.

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^4 - x^2 - 2x$$

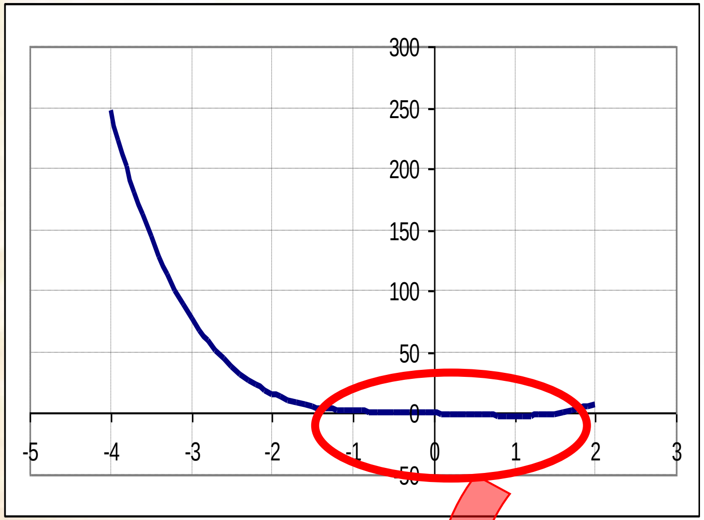
$$\boxed{\varepsilon = 0{,}0001}$$

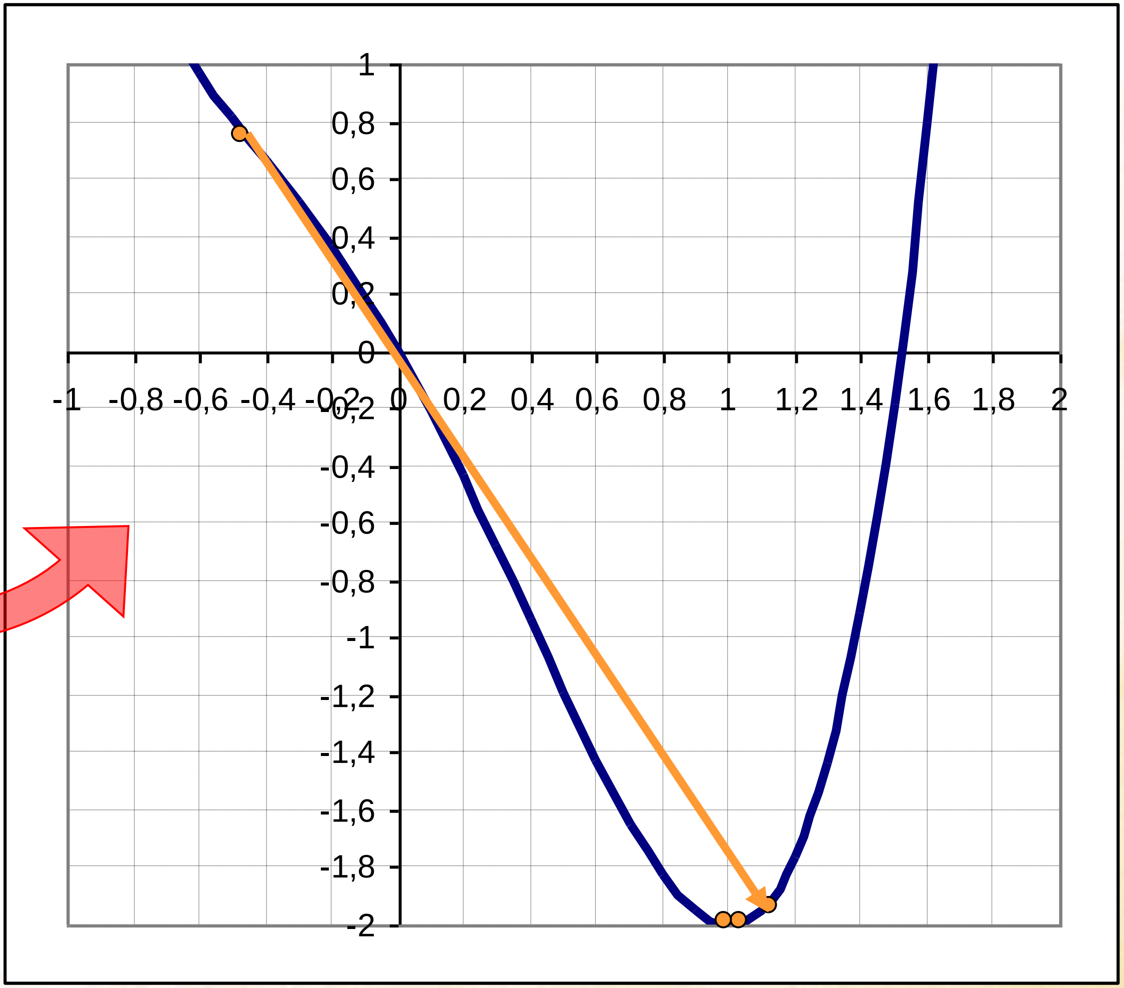
$$x_n = x_{n-1} - \frac{4x_{n-1}^3 - 2x_{n-1} - 2}{12x_{n-1}^2 - 2}$$

Iteración	x1	Abs(f'(x1))	x2	Abs(x2-x1)
1	-3	104	-2.0189	0.9811
2	-2.0189	30.8765	-1.3607	0.6582
3	-1.3607	9.3552	-0.8979	0.4627
4	-0.8979	3.1000	-0.4940	0.4039
5	-0.4940	1.4942	1.1151	1.6091
6	1.1151	1.3158	1.0132	0.1018
7	1.0132	0.1345	1.0002	0.0130
8	1.0002	0.0021	1.0000	0.0002
9	1.0000	0.0000		

Solución: $x = 1$

Método de Newton sin restricciones



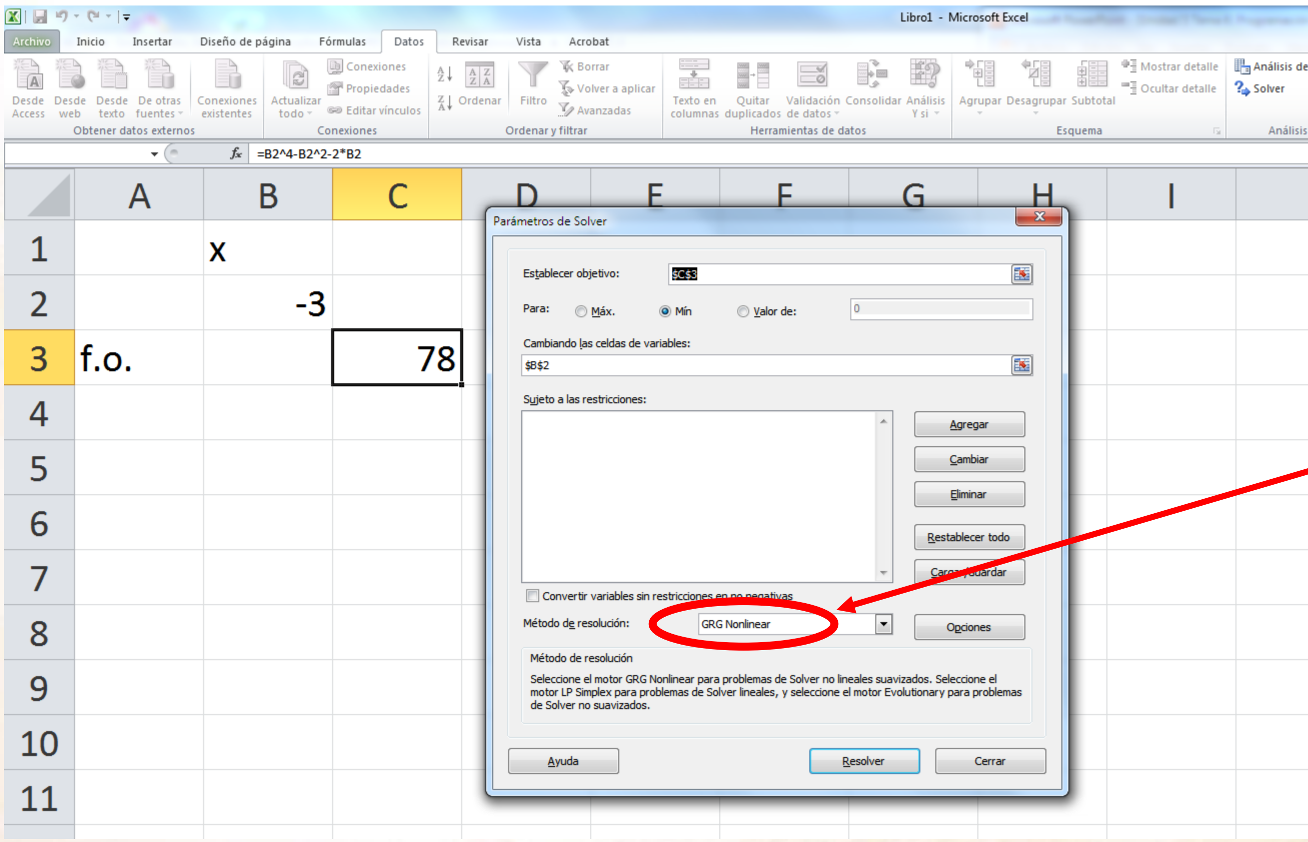


Iteración	x1
.	.
5	-0,4940
6	1,1151
7	1,0132
8	1,0002
9	1,0000

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal con SOLVER.

$$min \quad x^4 - x^2 - 2x$$



SOLVER no usa el método de NEWTON

Método de Newton sin restricciones

Celda objetivo (Mín)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
D4	f.o.	78	-2

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
C3	x	-3	1	Continuar

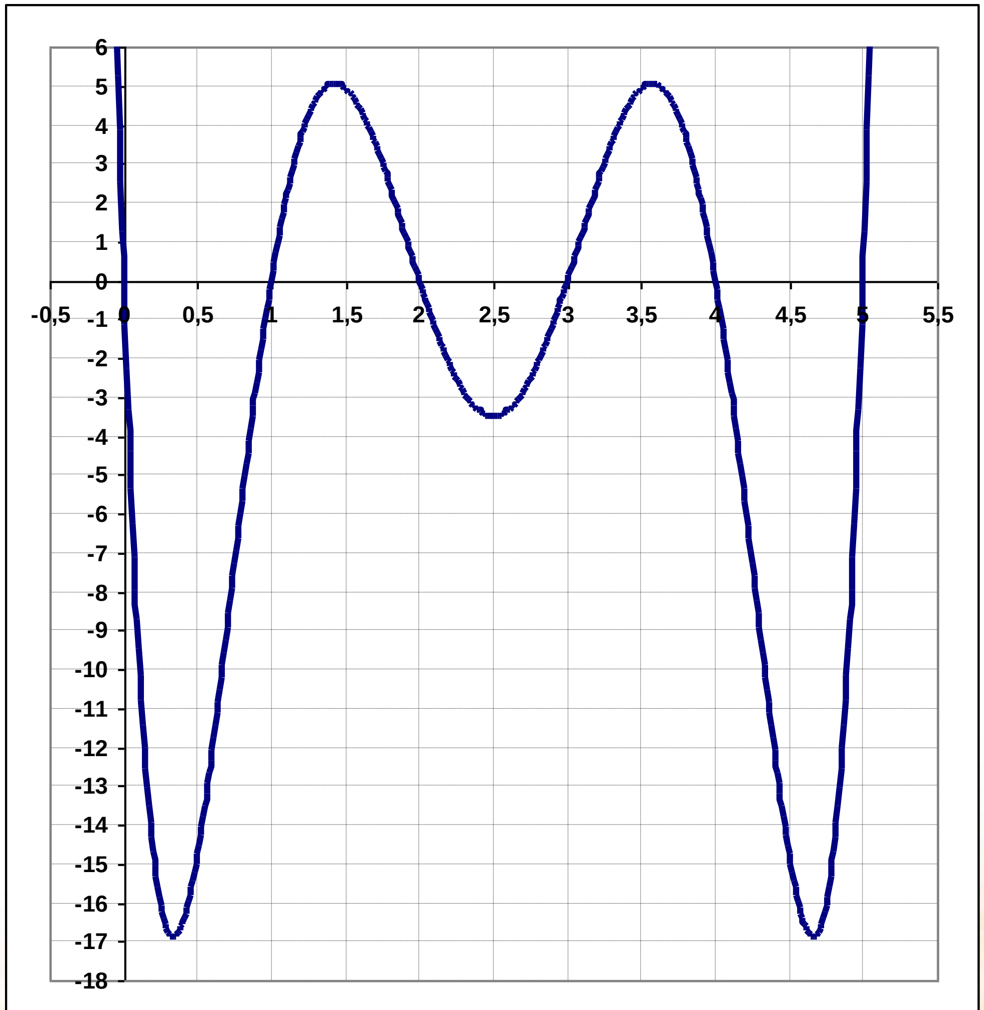
Restricciones

NINGUNO

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$



Método de Newton sin restricciones

$$f(x) = x^6 - 15x^5 + 85x^4 - 225x^3 + 274x^2 - 120x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{6x_n^5 - 75x_n^4 + 340x_n^3 - 675x_n^2 + 548x_n - 120}{30x_n^4 - 300x_n^3 + 1020x_n^2 - 1350x_n + 548}$$

Llega a un mínimo (absoluto)

Iteración	x1	x2	Abs(f'(x1))	Abs(x2-x1)
1	-1	-0,4569	1764	0,5431
2	-0,4569	-0,0682	547,1053	0,3887
3	-0,0682	0,1808	160,6445	0,2491
4	0,1808	0,3032	41,0417	0,1223
5	0,3032	0,3346	7,0453	0,0314
6	0,3346	0,3365	0,3920	0,0020
7	0,3365	0,3366	0,0015	0,0000
8	0,3366		0,0000	

Llega a un máximo (local)

Iteración	x1	x2	Abs(f'(x1))	Abs(x2-x1)
1	3,5	3,5792	3,375	0,0792
2	3,57917889	3,5737	0,2685	0,0055
3	3,5737	3,5737	0,0011	0,0000
4	3,5737		0,0000	

Llega a un máximo (local)

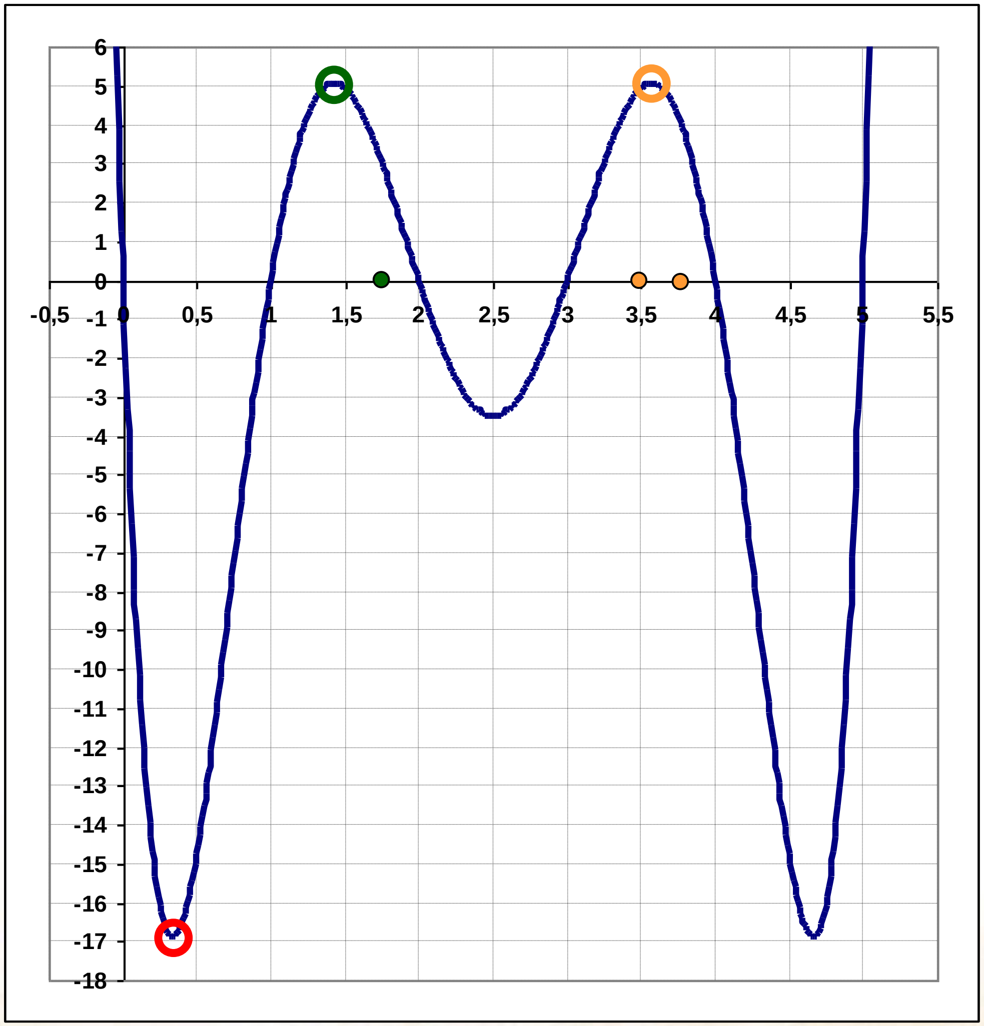
Iteración	x1	x2	Abs(f'(x1))	Abs(x2-x1)
1	1,75	1,1138	10,9395	0,6362
2	1,1138	1,4147	17,6389	0,3009
3	1,4147	1,4262	0,5699	0,0115
4	1,4262	1,4263	0,0050	0,0001
5	1,4263	1,4263	0,0000	0,0000

Llega a un máximo (local)

Iteración	x1	x2	Abs(f'(x1))	Abs(x2-x1)
1	3,75	3,5861	9,5801	0,1639
2	3,5861	3,5738	0,6102	0,0123
3	3,5738	3,5737	0,0057	0,0001
4	3,5737	3,5737	0,0000	0,0000

Método de Newton sin restricciones

$$\min \quad x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$



$x_1 = -1 \longrightarrow x_n = 0.3366$

$x_1 = 3.5 \longrightarrow x_n = 3.5737$

$x_1 = 3.75 \longrightarrow x_n = 3.5737$

$x_1 = 1.75 \longrightarrow x_n = 1.4263$

¡¡Busca **puntos que anulan la derivada**, no explícitamente mínimos!!

Método de Newton sin restricciones

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
C4	f(x)	720	-16,90089433

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
B4	x	-1	0,336553473

$x_n = 0.3366$

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
C4	f(x)	4,921875	-3,515625

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
B4	x	3,5	2,49999983

$x_n = 3.5737$

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
C4	f(x)	2,999267578	-3,515625

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
B4	x	1,75	2,499999302

$x_n = 1.4263$

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
C4	f(x)	4,229736328	-16,90089433

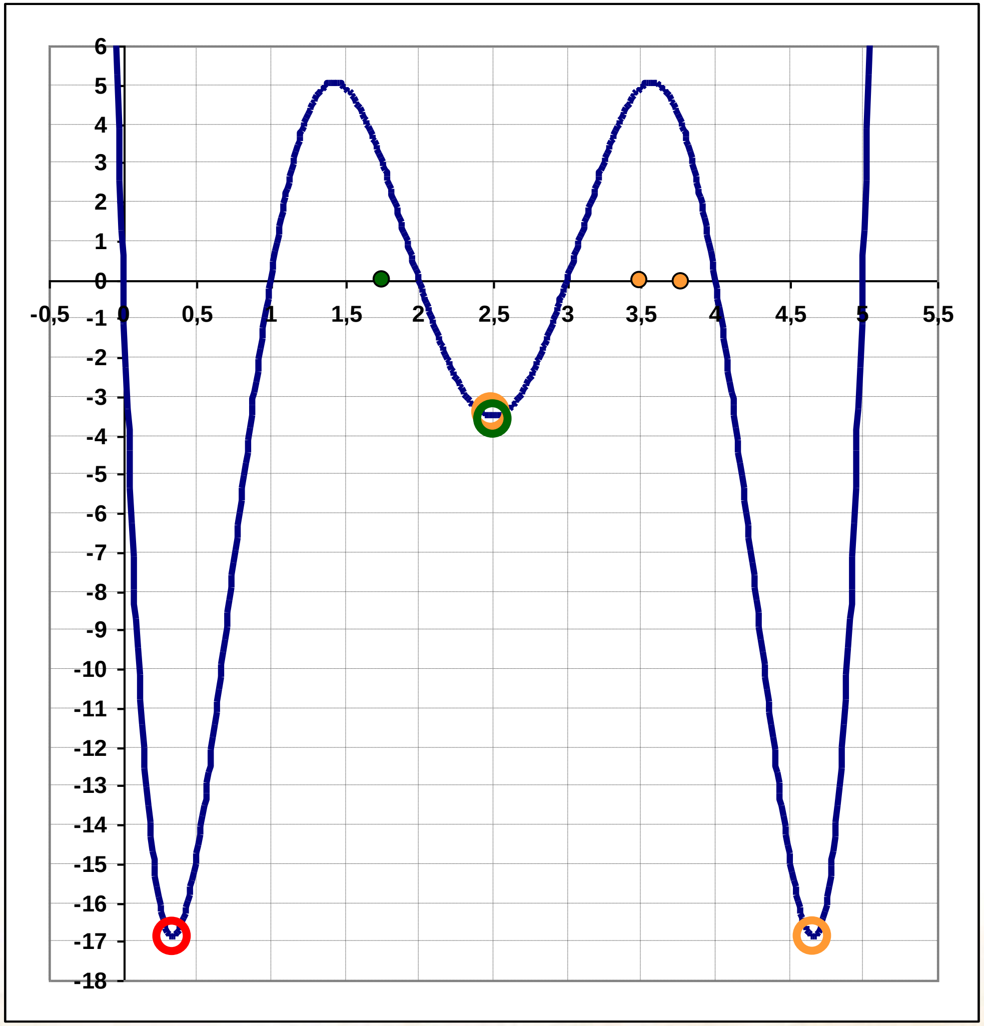
Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
B4	x	3,75	4,663446522

$x_n = 3.\ 5737$

Método de Newton sin restricciones

$$\min \quad x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$



SOLVER:

$x_1 = -1 \longrightarrow x_n = 0.3366$

$x_1 = 3.5 \longrightarrow x_n = 2.5000$

$x_1 = 3.75 \longrightarrow x_n = 4.6634$

$x_1 = 1.75 \longrightarrow x_n = 2.5000$

¡¡Encuentra **mínimos locales**!!

ALGORITMO DE NEWTON PARA PROBLEMAS DE VARIAS VARIABLES:

Paso 0: Elegir $\varepsilon > 0$ para precisión mínima. Elegir x^1 como semilla de inicio.

Paso 1: Calcular $\nabla f(x^1)$ y $Hf(x^1)$. Si $\|\nabla f(x^1)\| < \varepsilon$, entonces PARAR; x^1 es una solución para el problema. En otro caso, calcular $x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\,\nabla f(x^1)$ e IR al Paso 2.

Paso 2: Si $\| x^2 - x^1 \| < \varepsilon$, entonces PARAR; x^2 es una solución para el problema. En otro caso, hacer $x^1 := x^2$ e IR al Paso 1.

CARACTERÍSTICAS:

1. Se utiliza para funciones dos veces diferenciables.
2. Se basa en la aproximación cuadrática de una función.
3. **Sirve para buscar puntos que anulan el gradiente de una función.**
4. Debe existir la inversa del hessiano en cada punto.

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2 y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$semilla = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$semilla = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

ε = 0.0001

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix}$$

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2 y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix}$$

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1} \nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2 y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{bmatrix} 2(-1)(-1) + 2(-1) \\ (-1)^2 + 2(-1) - 2(-1) - 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2 y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix}$$

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1} \nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

ε = 0.0001

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix}$$

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = 2$$

$> \varepsilon \rightarrow$ Continuamos

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = 2$$

$$Hf(x^1) = \begin{bmatrix} 2(-1) & 2(-1)+2 \\ 2(-1)+2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$\min \quad x^2 y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1} \nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = 2$$

$$Hf(x^1) = \begin{bmatrix} 2(-1) & 2(-1)+2 \\ 2(-1)+2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow Hf(x^1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2 y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix}$$

$$H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1} \nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = 2 \quad Hf(x^1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y+2xy-y^2-3y$$

ε = 0.0001

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy+2y\\ x^2+2x-2y-3\end{bmatrix}$$

$$H(f(x,y))=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y & 2x+2\\ 2x+2 & -2\end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=2 \qquad Hf(x^1)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

ε = 0.0001

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = 2 \qquad Hf(x^1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

OJO: $-Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$ no es una verdadera dirección de descenso.

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = 2 \qquad Hf(x^1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$\min \quad x^2y+2xy-y^2-3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy+2y\\ x^2+2x-2y-3\end{bmatrix} \qquad H(f(x,y))=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y & 2x+2\\ 2x+2 & -2\end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=2 \qquad Hf(x^1)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},\quad x^1-x^2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y+2xy-y^2-3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2xy+2y \\ x^2+2x-2y-3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y))=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=2 \qquad Hf(x^1)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x^1-x^2=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\|x^1-x^2\right\|=1$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y+2xy-y^2-3y$$

ε = 0.0001

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy+2y\\ x^2+2x-2y-3\end{bmatrix} \qquad H(f(x,y))=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y & 2x+2\\ 2x+2 & -2\end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=2 \qquad Hf(x^1)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, \quad \left\|x^1-x^2\right\|=1$$

> ε → Continuamos

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = 2 \qquad Hf(x^1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left\|x^1 - x^2\right\| = 1$$

$$iter2) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2y+2xy-y^2-3y$$

ε = 0.0001

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy+2y\\ x^2+2x-2y-3\end{bmatrix} \qquad H(f(x,y))=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y & 2x+2\\ 2x+2 & -2\end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=2 \qquad Hf(x^1)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, \quad \left\|x^1-x^2\right\|=1$$

$$iter2) \quad x^1=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=0$$

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$min \quad x^2 y + 2xy - y^2 - 3y$$

$\varepsilon = 0.0001$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy + 2y \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \end{bmatrix} \qquad H(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1} \nabla f(x^1)$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = 2 \qquad Hf(x^1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \left\| x^1 - x^2 \right\| = 1$$

$$iter2) \quad x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = 0$$

$< \varepsilon \rightarrow$ STOP

Método de Newton sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema no lineal por el algoritmo de Newton.

$$\min \quad x^2y+2xy-y^2-3y$$

ε = 0.0001

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2xy+2y\\ x^2+2x-2y-3\end{bmatrix}$$

$$H(f(x,y))=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y & 2x+2\\ 2x+2 & -2\end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - Hf(x^1)^{-1}\nabla f(x^1)$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=2 \qquad Hf(x^1)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

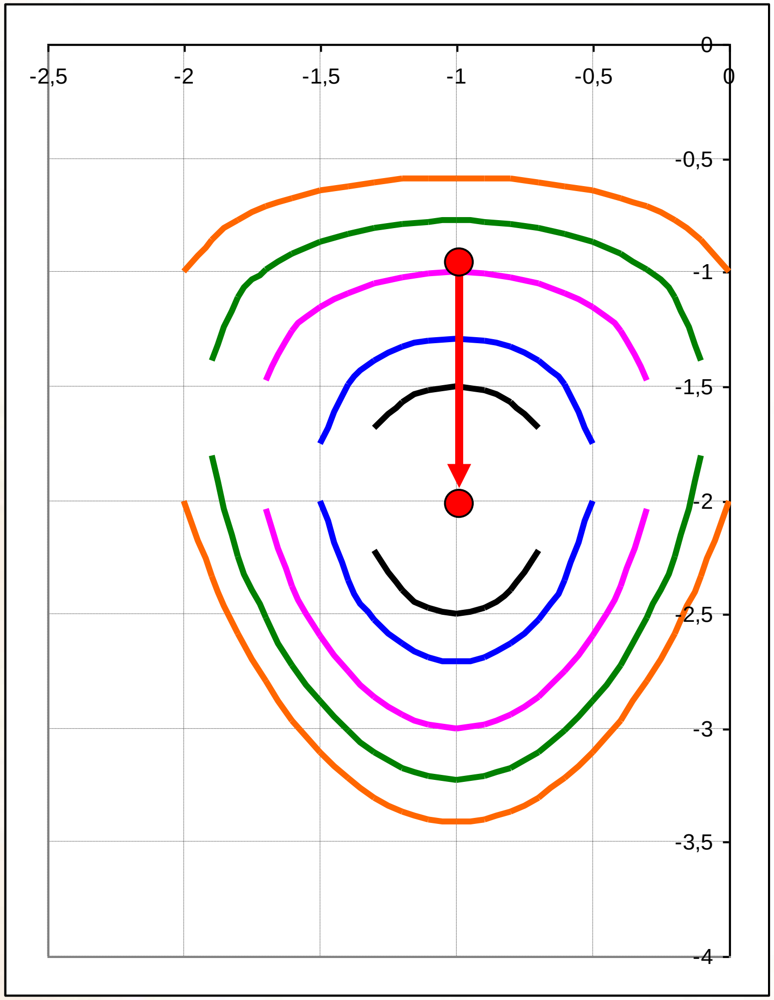
$$x^2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},\quad \left\|x^1-x^2\right\|=1$$

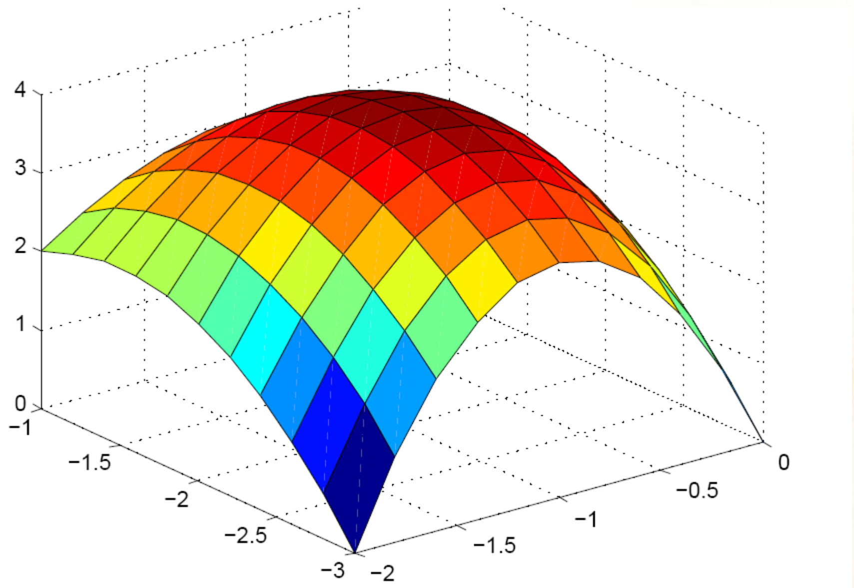
$$iter2)\quad x^1=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=0$$ < ε → STOP

Solución:

$$x^*=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

Método de Newton sin restricciones



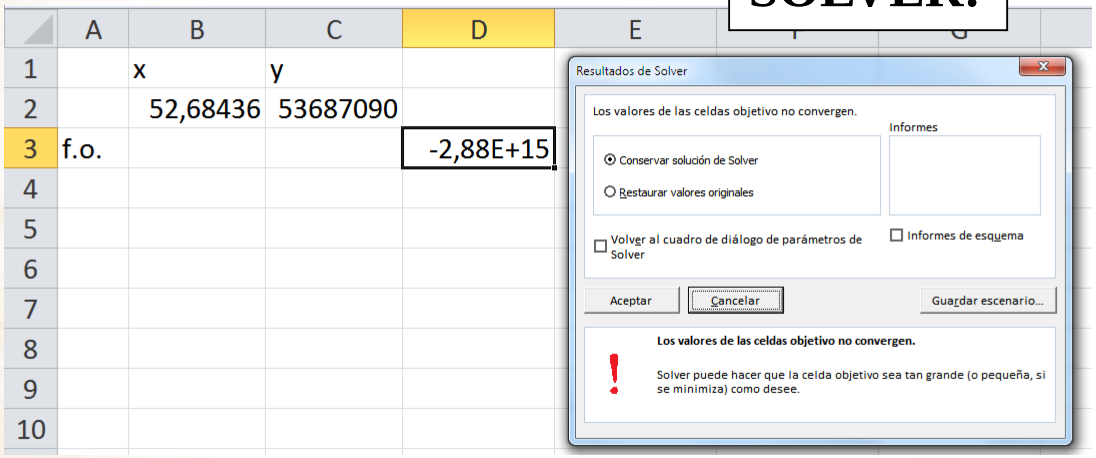


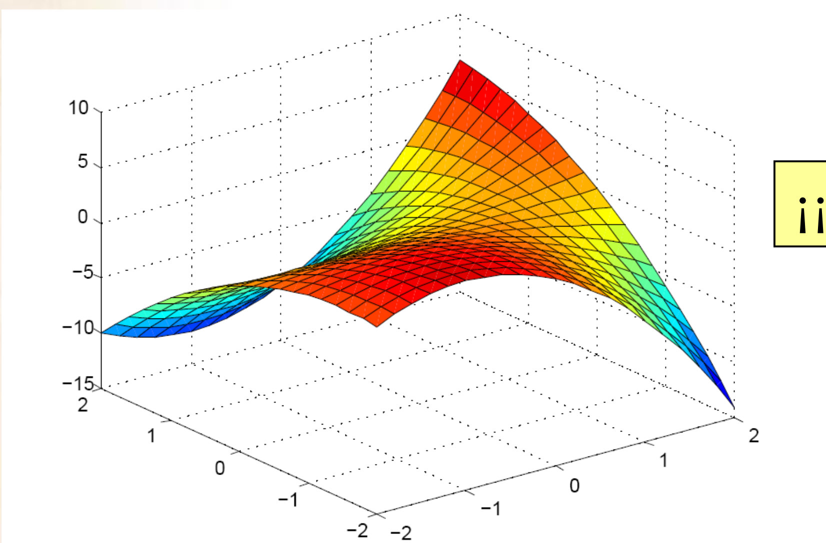
¡¡¡Punto estacionario!!! $x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

La dirección **d** utilizada era de ascenso!!!

Método de Newton sin restricciones

SOLVER:





¡¡¡No acotado!!!

x	y	f(x,y)
0	0	0
1	-1	-1
2	-2	-14
3	-3	-45
4	-4	-100
5	-5	-185
6	-6	-306
7	-7	-469
8	-8	-680
9	-9	-945
10	-10	-1270
11	-11	-1661
12	-12	-2124
13	-13	-2665
14	-14	-3290
15	-15	-4005
16	-16	-4816
17	-17	-5729
18	-18	-6750
19	-19	-7885
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Dificultades del algoritmo de Newton:

- Existencia de múltiples mínimos locales
- Convergencia de los algoritmos al mínimo global
- Suavidad de las funciones a minimizar
- Selección del punto inicial
- $-Hf(x)^{-1}\,\nabla f(x)$ puede **no** ser una dirección de descenso. En realidad, encuentra **puntos críticos**.

ALGORITMO DEL GRADIENTE PARA PROBLEMAS DE VARIAS VARIABLES:

Paso 0: Elegir $\varepsilon > 0$ para precisión mínima. Elegir x^1 como semilla de inicio.

Paso 1: Calcular $\nabla f(x^1)$. Si $\|\nabla f(x^1)\| < \varepsilon$, entonces PARAR, x^1 es una solución para el problema. En otro caso, resolver el problema de una variable:

$min\ f(x^1 - m\nabla f(x^1))$, $m \geq 0$. Hacer $x^2 = x^1 - m^*\nabla f(x^1)$ e IR al Paso 2.

Paso 2: Si $\|x^2 - x^1\| < \varepsilon$, entonces PARAR, x^2 es una solución para el problema. En otro caso, hacer $x^1 := x^2$ e IR al Paso 1.

Método del Gradiente sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy} \qquad semilla = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\varepsilon = 0.0001}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \nabla f\,(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f\,(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min\ \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

> ε = 0.0001 → Continuamos

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=x^1-m\nabla f(x^1)$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=x^1-m\nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \quad \to g(m) = \frac{-\frac{1}{3}m - \frac{1}{3}m}{3+\left(\frac{1}{3}m\right)^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)\left(\frac{1}{3}m\right)} = \frac{-2m}{9+m^2}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min\ \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2}\\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2}\end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\ \frac{1}{3}m\end{pmatrix}\quad\rightarrow\begin{cases}min\quad g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2}\\ s.a:\qquad m\geq 0\end{cases}$$

Método del Gradiente sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} min \quad g(m) = \dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: \qquad m \geq 0 \end{cases}$$

$$g'(m) = \frac{-2(9+m^2)-2m(-2m)}{(9+m^2)^2} = \frac{2m^2-18}{(9+m^2)^2}$$

Método del Gradiente sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} min \quad g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: \qquad m\geq 0 \end{cases}$$

$$g'(m)=\frac{-2(9+m^2)-2m(-2m)}{(9+m^2)^2}=\frac{2m^2-18}{(9+m^2)^2}$$

Como $(9+m^2)^2>0$,

$$g'(m)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2m^2-18=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=3$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min\ \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}\quad\rightarrow\begin{cases} min & g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: & m\geq 0\end{cases}$$

$$g'(m)=\frac{2m^2-18}{(9+m^2)^2}\qquad g'(m)=0\quad\Leftrightarrow\quad m=3$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} min \quad g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: \qquad m\geq 0 \end{cases}$$

$$g'(m)=\frac{2m^2-18}{(9+m^2)^2} \qquad g'(m)=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=3$$

$$g'(m)\begin{cases} <0 \quad \text{si } m<3 \\ >0 \quad \text{si } m>3 \end{cases}$$

Método del Gradiente sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min\ \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}\quad\rightarrow\begin{cases} min & g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: & m\geq 0\end{cases}$$

$$g'(m)=\frac{2m^2-18}{(9+m^2)^2}\qquad g'(m)=0\quad\Leftrightarrow\quad m=3$$

$$g'(m)\begin{cases}<0 & \text{si } m<3\\ >0 & \text{si } m>3\end{cases}$$

$m^* = 3 \geq 0$ es un mínimo

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\| \nabla f(x^1) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} min & g(m) = \dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: & m \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{m^* = 3}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix} \quad \to \begin{cases} min & g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: & m\geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{m^*=3}$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Método del Gradiente sin restricciones

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min\ \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2}\\[2ex]\dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2}\end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}\quad\rightarrow\begin{cases}min & g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2}\\ s.a: & m\geq 0\end{cases}\qquad m^*=3$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad x^1-x^2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$\min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}\quad\to\begin{cases}\min & g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2}\\ s.a: & m\geq 0\end{cases}\qquad m^*=3$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad x^1-x^2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\qquad \left\|x^2-x^1\right\|=\sqrt{2}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} min \quad g(m) = \frac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: \quad m \geq 0 \end{cases} \qquad m^* = 3$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^1 - x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left\|x^2 - x^1\right\| = \sqrt{2}$$

> ε = 0.0001
→ Continuamos

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\ \frac{1}{3}m\end{pmatrix} \quad \to \begin{cases} min \quad g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: \qquad m\geq 0 \end{cases} \qquad m^*=3$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\ \frac{1}{3}m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \left\|x^2-x^1\right\|=\sqrt{2}$$

$$iter2) \quad x^1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} min & g(m) = \dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: & m \geq 0 \end{cases} \qquad m^* = 3$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left\|x^2 - x^1\right\| = \sqrt{2}$$

$$iter2) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \quad \to \begin{cases} min & g(m) = \dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: & m \geq 0 \end{cases} \qquad m^* = 3$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m \\ \frac{1}{3}m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left\|x^2 - x^1\right\| = \sqrt{2}$$

$$iter2) \quad x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\| = 0$$

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \\ \frac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2} \end{pmatrix}$$

$$iter1) \quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{cases} min & g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2} \\ s.a: & m\geq 0 \end{cases} \qquad m^*=3$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \left\|x^2-x^1\right\|=\sqrt{2}$$

$$iter2) \quad x^1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=0$$ < ε → STOP

EJEMPLO: Resolver el siguiente problema por el algoritmo del gradiente.

$$min\ \frac{-x-y}{3+x^2+y^2+xy}$$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{-3+x^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2}\\[2ex]\dfrac{-3+y^2+2xy}{\left(3+x^2+y^2+xy\right)^2}\end{pmatrix}$$

$$iter1)\quad x^1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}\ \rightarrow\begin{cases}min & g(m)=\dfrac{-2m}{9+m^2}\\ s.a: & m\geq 0\end{cases}\qquad m^*=3$$

$$x^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}m\\\frac{1}{3}m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad \left\|x^2-x^1\right\|=\sqrt{2}$$

$$iter2)\quad x^1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \nabla f(x^1)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \left\|\nabla f(x^1)\right\|=0$$

$< \varepsilon \rightarrow$ STOP

Solución:

$$x^*=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Dificultades del algoritmo del Gradiente:

- Existencia de múltiples mínimos locales
- Convergencia de los algoritmos al mínimo global
- Suavidad de las funciones a minimizar
- Selección del punto inicial